МАТЕМАТИКА

УДК 512.542.6

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСОТЫ 3 РЕШЕТКИ τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

П.А. Жизневский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ELEMENTS OF THE HEIGHT 3 OF THE LATTICE OF ALL τ-CLOSED n-MULTIPLY ω-COMPOSITION FORMATIONS

P.A. Zhiznevsky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получено описание элементов высоты 3 решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций. Установлена дистрибутивность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций некоторой τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$, имеющей высоту 3 в решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Ключевые слова: *конечная группа, формация, ω-композиционный спутник, τ-замкнутая n-кратно ω-композиционная формация, высота формации.*

In this paper elements of the height 3 of the lattice $c^{\tau}_{\omega_n}$ of all τ-closed n-multiply ω-composition formations are described. It is proved that if $\mathfrak{F}$ is an element of the height 3 of the lattice $c^{\tau}_{\omega_n}$, then the lattice of τ-closed n-multiply ω-composition subformations of $\mathfrak{F}$ is distributive.

Keywords: *finite group, formation, ω-composition satellite, τ-closed n-multiply ω-composition formation, height of formation.*

AMS 2000 Mathematics Subject Classification: 20D10.

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Используется терминология, принятая в [1]–[3].

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел. Тогда любую функцию вида $f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{\text{формации}\}$ называют ω-композиционным спутником. Для произвольного ω-композиционного спутника f полагают

$$CF_{\omega}(f)=\{G\,|\,G/R_{\omega}(G)\in f(\omega')\text{ и }G/C^{p}(G)\in f(p)\text{ для всех } p\in\pi(Com(G))\cap\omega\},$$

где $Com(G)$ – множество всех абелевых композиционных факторов группы G, $R_{\omega}(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G, $C^{p}(G)$ – пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у группы G нет, то полагают $C^{p}(G)=G$). Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=CF_{\omega}(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f – ω-композиционный спутник этой формации.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-композиционной. При $n\geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-композиционной, если $\mathfrak{F}=CF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

Подгрупповым функтором (см. [2]) называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что:

1) $G\in\tau(G)$;

2) для всякого эпиморфизма $\varphi:A\to B$, и для любых групп $H\in\tau(A)$, $T\in\tau(B)$ имеет место $H^{\varphi}\in\tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}}\in\tau(A)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутым, если $\tau(G)\subseteq\mathfrak{F}$ для любой группы $G\in\mathfrak{F}$.

Для произвольных подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1\leq\tau_2$ тогда и только тогда, когда $\tau_1(G)\subseteq\tau_2(G)$ для любой группы G.

Подгрупповой функтор τ называется тривиальным, если для любой группы G имеет место $\tau(G)=\{G\}$. Символы s_{sn} и s_n соответственно обозначают такие подгрупповые функторы, что $s_{sn}(G)$ – множество всех субнормальных подгрупп группы G, а $s_n(G)$ – множество всех нормальных подгрупп группы G.

Напомним, что символом $c_{\omega_n}^{\tau}$ обозначается решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, а через $C_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$ – решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных подформаций некоторой τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{F}$.

Формации, принадлежащие $c_{\omega_n}^{\tau}$ называют $c_{\omega_n}^{\tau}$-формациями. Если все значения ω-композиционного спутника принадлежат решетке $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$, то такой спутник называют $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значным.

Если $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-композиционных $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$, то спутник $\bigcap_{i \in I} f_i$ называется минимальным ω-композиционным $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значным спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией или, иначе, $\mathfrak{H}_{\omega_n}^{\tau}$-критической, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Говорят, что группа G является τ-минимальной не $\mathfrak{H}$-группой, если $G \notin \mathfrak{H}$, но классу $\mathfrak{H}$ принадлежит каждая собственная τ-подгруппа группы G.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $c_{\omega_n}^{\tau}$-формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$. В частности, пишут $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$.

Для произвольных непустых $c_{\omega_n}^{\tau}$-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таких, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ символом $\mathfrak{F}/_{\omega_n}^{\tau}\mathfrak{M}$ обозначается такая подрешетка решетки $c_{\omega_n}^{\tau}$, которая состоит из всех $c_{\omega_n}^{\tau}$-формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты k решетки $c_{\omega_n}^{\tau}$, когда k – точная верхняя грань длин цепей

$$\varnothing = \mathfrak{F}_0 \subset (1) = \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{k-1} \subset \mathfrak{F}_k = \mathfrak{F},$$

в которых $\mathfrak{F}_i$ – $c_{\omega_n}^{\tau}$-формация при всех $i = 0, \ldots, k$. Высоту $c_{\omega_n}^{\tau}$-формации $\mathfrak{F}$ в решетке $c_{\omega_n}^{\tau}$ будем обозначать через $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F})$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие подгрупповые функторы τ, что $\tau \leq s_{sn}$.

1 Предварительные результаты

***Лемма* 1.1** [4, с. 28]. *В любой модулярной решетке M отображения $\varphi_a : x \to x \wedge a$ и $\varphi_b : y \to y \vee b$ являются взаимно-обратными изоморфизмами между интервалами $[b, a \vee b]$ и $[a \wedge b, a]$.*

***Лемма* 1.2** [5]. *Тогда и только тогда $c_{\omega_n}^{\tau}$-формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты* 2 *решетки $c_{\omega_n}^{\tau}$ ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$, где G – простая группа.*

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^{\tau}$-неприводимая формация ($n \geq 1$). Тогда $\mathfrak{F}$ является однопорожденной $c_{\omega_n}^{\tau}$-формацией с единственной максимальной $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформацией.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – множество всех собственных $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформаций формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X} = \cup_{i \in I}\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^{\tau}$-неприводимая формация, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная $c_{\omega_n}^{\tau}$-формация с условием: $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит выбору формации $\mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{M}$ – максимальная $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформация формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ найдется еще одна максимальная $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформация $\mathfrak{M}_1$. Так как $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}_1$. Значит, $\mathfrak{M}$ – единственная максимальная $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформация формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G \subset \mathfrak{F}$. Тогда $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{X}$. Поэтому

$$c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G \subseteq c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{X} = \mathfrak{M},$$

что противоречит выбору группы G. Следовательно, $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G = \mathfrak{F}$ – однопорожденная $c_{\omega_n}^{\tau}$-формация. Лемма доказана.

***Лемма* 1.4** [5]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая нильпотентная насыщенная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega_n}^{\tau}$-критической формацией ($n \geq 1$), когда $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(G)$, что либо $\pi = \pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) *G – группа простого порядка*
$$p \in \omega \setminus \pi(Com(\mathfrak{H}));$$

2) $G=[P]Q$, *где* $P=C_G(P)$ *– абелева* p*-группа,* $p\in\omega\cap\pi(Com(\mathfrak{H}))$ *и* $|Q|=q\neq p$, p *и* q *– простые числа.*

***Лемма* 1.5** [6]. *Если* G *– простая группа, порядок которой не принадлежит* ω, *то* $c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}G=\mathrm{form}G=\tau\mathrm{form}G$.

***Лемма* 1.6** [7]. *Пусть* $\mathfrak{F}=c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{X}$ *– непустая совокупность групп и* $n\geq 1$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет минимальный* ω*-композиционный* $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$*-значный спутник* f *и справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega')=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(G/R_{\omega}(G)\mid G\in\mathfrak{X})$;

2) $f(p)=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(G/C^{p}(G)\mid G\in\mathfrak{X})$, *для всех* $p\in\pi(Com(\mathfrak{X}))\cap\omega$;

3) $f(p)=\varnothing$, *для всех* $p\in\omega\setminus\pi(Com(\mathfrak{X}))$;

4) *если* $\mathfrak{F}=CF_{\omega}(h)$ *и спутник* h $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$*-значен, то* $f(p)=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A\mid A\in h(p)\cap\mathfrak{F},$ $O_p(A)=1)$, *для всех* $p\in\pi(Com(\mathfrak{X}))\cap\omega$ *и* $f(\omega')=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}(A\mid A\in h(\omega')\cap\mathfrak{F},R_{\omega}(A)=1)$.

***Лемма* 1.7.** *Если* G *– простая группа, порядок которой не принадлежит* ω *и* $n\geq 1$, *то* $c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G=\ldots=c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}G=\tau\mathrm{form}G=\mathrm{form}G$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n=0,1$ утверждение вытекает из леммы 1.5. Предположим, что $n>1$ и утверждение леммы верно при $n-1$. Пусть $\mathfrak{F}=c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$ и f – минимальный ω-композиционный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathrm{form}G\subseteq\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathrm{form}G$ и пусть H – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathrm{form}G$. Тогда H – монолитическая группа с цоколем $Q=H^{\mathrm{form}G}$. Предположим, что $\pi(Com(Q))\cap\omega\neq\varnothing$. Тогда Q – абелева q-группа, где $q\in\omega$. Понятно, что $C^{q}(H)=Q$. Из леммы 1.6, получаем $H/C^{q}(H)=H/Q\in f(q)\neq\varnothing$. Но поскольку $q\in\omega$, то $q\notin\pi(Com(G))$ и, согласно лемме 1.6, $f(q)=\varnothing$. Противоречие. Значит, $\pi(Com(Q))\cap\omega=\varnothing$. Тогда $R_{\omega}(H)=1$. Ввиду леммы 1.6 и предположения индукции получаем

$$H\simeq H/R_{\omega}(H)\in f(\omega')=c_{\omega_{n-1}}^{\tau}\mathrm{form}G=\mathrm{form}G.$$

Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}\subseteq\mathrm{form}G$. Таким образом,

$$c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G=\ldots=c_{\omega}^{\tau}\mathrm{form}G=\tau\mathrm{form}G=\mathrm{form}G.$$

Лемма доказана.

***Лемма* 1.8** [1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}$ p*-композиционна для любого простого числа* $p\notin\pi(Com(\mathfrak{F}))$;

2) *если* $\varnothing\neq\omega_1\subseteq\omega$ *и* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-композиционна, то* $\mathfrak{F}$ *–* ω_1*-композиционна;*

3) *если* $\omega=\bigcup_{i\in I}\omega_i$ *и формация* $\mathfrak{F}$ *является* ω_i*-композиционной для всех* $i\in I$, *то* $\mathfrak{F}$ *–* ω*-композиционна.*

Напомним, что для произвольных ω-композиционных $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значных спутников f и h полагают $f\leq h$, если $f(a)\subseteq h(a)$ для всех $a\in\omega\cup\{\omega'\}$.

***Лемма* 1.9** [1]. *Пусть* f_1 *и* f_2 *– минимальные* ω*-композиционные* $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$*-значные спутники формаций* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$ *в том и только в том случае, когда* $f_1\leq f_2$.

***Лемма* 1.10** [8, с. 18]. *Любая подформация формации* $\mathfrak{N}$ *замкнута относительно подгрупп.*

***Лемма* 1.11** [3, с. 81]. *Пусть* $A\in\mathrm{form}G$, *где* G *– конечная группа. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *экспонента группы* A *не превосходит экспоненту группы* G;

2) *каждый главный фактор группы* A *изоморфен некоторому главному фактору группы* G;

3) *каждый композиционный фактор группы* A *изоморфен некоторому композиционному фактору группы* G;

4) *ступень любого нильпотентного фактора группы* A *не превосходит наибольшую из ступеней нильпотентных факторов группы* G.

***Лемма* 1.12** [3, с. 175]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная неабелева формация, когда* $\mathfrak{F}=\mathrm{form}G$, *где* G *– одна из следующих групп:*

1) *ненильпотентная монолитическая группа с таким цоколем* P, *что* $P\not\subseteq\Phi(G)$ *и факторгруппа* G/P *абелева;*

2) *группа кватернионов порядка* 8;

3) *неабелева группа порядка* p^3 *простой нечетной экспоненты* p.

***Лемма* 1.13** [9]. *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathrm{form}A$ *– формация, порожденная простой группой* A. *Тогда любая неединичная группа из* $\mathfrak{F}$ *имеет вид* $A_1\times A_2\times\ldots\times A_t$, *где* $A_1\simeq A_2\simeq\ldots\simeq A_t\simeq A$.

***Лемма* 1.14** [2]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– произвольная совокупность групп,* $\mathfrak{M}=\mathrm{S}_{\tau}(G)$. *Тогда* $\tau\mathrm{form}\mathfrak{M}=\mathrm{form}\mathfrak{M}$.

***Лемма* 1.15** [3, с. 40]. *Пусть* M *и* N *– идеалы мультикольца* A, *причем* $M\subseteq C_A(N)$. *Тогда* $[N](A/M)\in\mathrm{form}A$.

Напомним, что через $\mathrm{H}\mathfrak{X}$ обозначается множество всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.16** [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольная непустая формация и пусть у каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых G-главных факторов. Тогда, если A – монолитическая группа из $\mathrm{form}\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, то $A \in \mathrm{H}\mathfrak{X}$.*

***Лемма* 1.17** [2, с. 41]. *Пусть A – монолитическая группа с цоколем $R \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}A$ τ-неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}(\{A/R\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы A.*

***Лемма* 1.18** [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация. Тогда $\mathfrak{N}_{\omega}^{n}\mathfrak{F} = \underbrace{\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}_{\omega}\ldots\mathfrak{N}_{\omega}}_{n\ раз}\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной формацией.*

***Лемма* 1.19** [11]. *Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая наследственная формация и $\mathfrak{F}$ – непустая τ-замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация.*

***Лемма* 1.20** [2]. *Для любой совокупности τ-замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ имеет место $\tau\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i) = \mathrm{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)$.*

***Лемма* 1.21** [4, с. 25]. *Любая цепь является дистрибутивной решеткой.*

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Тогда и только тогда $c_{\omega_n}^{\tau}$-формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты* 3 *решетки $c_{\omega_n}^{\tau}$ ($n \ge 1$), когда $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$, где G – одна из следующих групп:*

1) $G = A_1 \times A_2$, где A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы;

2) G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_p$-группа с нефраттиниевым цоколем $P = G^{\mathfrak{N}_p} \ne G$, что $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$ и $p \in \omega$;

3) G – циклическая группа порядка p^2, $p \notin \omega$;

4) G – неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p \notin \omega$;

5) G – монолитическая группа с нефраттиниевым цоколем $P \ne G$ таким, что $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, и найдется такая простая группа A, что $|A| \notin \omega$ и факторгруппа G/P, а также всякая неединичная группа из $\tau(G) \setminus \{G\}$ имеют вид $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $t \ge 1$, $A_1 \simeq A_2 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является элементом высоты 3 решетки $c_{\omega_n}^{\tau}$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^{\tau}$-приводимая формация. Пусть $\mathfrak{M}$ – максимальная $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформация в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{K}$ – собственная $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформация из $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}$. Ясно, что $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{K}) \le 2$. Поскольку $c_{\omega_n}^{\tau}$-формация высоты 1 в решетке $c_{\omega_n}^{\tau}$ – это формация единичных групп (1), а формация $\mathfrak{K} \ne (1)$, то $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{K}) = 2$. Значит, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{M} = (1)$. Согласно лемме 1.1, имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}/_{\omega_n}^{\tau}\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \vee_{\omega_n}^{\tau} \mathfrak{K}/_{\omega_n}^{\tau}\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{K}/_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) = \mathfrak{K}/_{\omega_n}^{\tau}(1).$$

Тогда

$$h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M}) + h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{K}) - 1.$$

Так как $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{K}) = 2$, то $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M}) = 2$. Применяя теперь лемму 1.2, видим, что $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A_1$ и $\mathfrak{K} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A_2$, где A_i – простая группа, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{M} \ne \mathfrak{K}$, то A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы. Таким образом, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$ и относительно группы $G = A_1 \times A_2$ выполняется условие 1) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ – $c_{\omega_n}^{\tau}$-неприводимая формация. Тогда по лемме 1.3 в $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$ имеется единственная максимальная $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформация $\mathfrak{M}$, причем $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{M}) = 2$. Значит, $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{M}_{\omega_n}^{\tau}$-критическая формация. По лемме 1.2, $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A$, где A – простая группа.

Пусть A – группа простого порядка $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}$ – $(\mathfrak{N}_p)_{\omega_n}^{\tau}$-критическая формация. По лемме 1.4, $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$, где G такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_p$-группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{N}_p} \not\subseteq \Phi(G)$, что либо $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, либо G – группа простого порядка $q \in \omega$. Если G – группа простого порядка $q \in \omega$, то ввиду леммы 1.2, $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 2$. Противоречие. Значит, рассматриваемый случай невозможен. Поэтому, $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$. Если $G = P$, то снова по лемме 1.2 получаем $h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 2$. Противоречие. Следовательно, $P \ne G$ и группа G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть теперь A – простая группа, порядок которой не принадлежит ω. Тогда по лемме 1.7, $\mathfrak{M} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A = \mathrm{form}A$.

Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{M}$. Тогда G – монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{M}$-группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$ и $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G$.

Предположим, что $\pi(Com(P))\cap\omega\neq\varnothing$. Тогда P – абелева p-группа, $p\in\omega$. Поскольку $G\in\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ содержит две различные максимальные $c_{\omega_n}^{\tau}$-подформации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_p$, что противоречит $c_{\omega_n}^{\tau}$-неприводимости формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, такой случай невозможен.

Пусть теперь $\pi(Com(P))\cap\omega=\varnothing$. Поскольку $G/P\in\mathfrak{M}=\mathrm{form}A$ и $\pi(Com(A))\cap\omega=\varnothing$, то получаем, что $\pi(Com(G))\cap\omega=\varnothing$. Тогда по лемме 1.8 формация $\mathfrak{F}$ и все ее подформации ω-композиционны. Пусть $\mathfrak{R}$ – произвольная ω-композиционная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда $\pi(Com(\mathfrak{R}))\cap\omega=\varnothing$. Ввиду примера 1 из [1] формация $\mathfrak{R}$ имеет ω-композиционный спутник r такой, что $r(a)=\varnothing$ для всех $a\in\omega$ и $r(\omega')=\mathfrak{R}$. Заметим, что все значения спутника r ω-композиционны. Значит, формация $\mathfrak{R}$ – n-кратно ω-композиционна. Итак, формация $\mathfrak{F}$ и все ее подформации n-кратно ω-композиционны. Следовательно, высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех τ-замкнутых формаций совпадает с ее высотой в решетке $c_{\omega_n}^{\tau}$, т.е. $h^{\tau}(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 3$.

Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна. Тогда по лемме 1.10 высота формации $\mathfrak{F}$ в решетке всех формаций совпадает с ее высотой в решетке всех τ-замкнутых формаций, т. е. $h(\mathfrak{F}) = h^{\tau}(\mathfrak{F}) = h_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}) = 3$.

Допустим, что формация $\mathfrak{F}$ абелева. Тогда G – абелева монолитическая группа. Согласно основной теореме о конечных абелевых группах, G – циклическая примарная группа. Пусть $|G| = p^k$, где $p\notin\omega$ и $k\geq 0$. Тогда ввиду примера 5.3.3 [2] получаем, что $h(\mathfrak{F}) = k+1$. Но по условию $h(\mathfrak{F}) = 3$. Следовательно, k=2. Таким образом, G – циклическая группа порядка p^2, где $p\notin\omega$, т. е. G удовлетворяет условию 3) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ – нильпотентная неабелева формация. Тогда формация $\mathfrak{M}$ также нильпотентна. Значит, A не может быть простой неабелевой группой. Поэтому A – группа простого порядка $p, p\notin\omega$ и формация $\mathfrak{M}$ – абелева. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация. Согласно лемме 1.12 группа G – либо неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты p ($p\notin\omega$), либо группа кватернионов порядка 8. В первой случае группа G удовлетворяет условию 4) теоремы. Пусть G – группа кватернионов порядка 8. Тогда в G имеется циклическая подгруппа M порядка 4. По лемме 1.10, $M\in\mathfrak{F}$. Тогда мы имеем цепь подформаций: $(1)\subset\mathrm{form}Z_2\subset\mathrm{form}Z_4$, где Z_2 и Z_4 – циклические группы порядков 2 и 4 соответственно. Значит, $h(\mathrm{form}Z_4)=3$. Но $h(\mathfrak{F})=3$. Следовательно, $\mathfrak{F}=\mathrm{form}Z_4$. Получили противоречие, так как формация $\mathfrak{F}$ неабелева. Таким образом, данный случай невозможен.

Предположим теперь, что формация $\mathfrak{F}$ ненильпотентна. Допустим, что $P\not\subseteq\Phi(G)$. Так как $P=G^{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}=\mathrm{form}A$ и G – τ-минимальная не $\mathfrak{M}$-группа, то ввиду леммы 1.13 получаем, что G удовлетворяет условию 5) теоремы. Пусть теперь $P\subseteq\Phi(G)$. Тогда P – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Поскольку $\pi(Com(P))\cap\omega=\varnothing$, то $p\notin\omega$. Пусть A – абелева группа. Тогда $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$. Поскольку $G/P\in\mathfrak{M}$ и $P\subseteq\Phi(G)$, то в силу насыщенности формации $\mathfrak{N}$ получаем, что $G\in\mathfrak{N}$. Противоречие, так как $\mathfrak{F}$ ненильпотентная формация. Следовательно, A – простая неабелева группа. Теперь поскольку G – ω'-группа и τ-минимальная не $\mathfrak{M}$-группа, то по лемме 1.14, $\mathfrak{F}=c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}G=\mathrm{form}G$. Рассмотрим группу $G_1=[P](G/C_G(P))$. Согласно лемме 1.15, $G_1\in\mathfrak{F}$. Поэтому $\mathrm{form}G_1\subseteq\mathfrak{F}$. Так как $G_1\notin\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F}=\mathrm{form}G_1$. Таким образом, $G\in\mathrm{form}G_1\setminus\mathfrak{M}$. Поскольку $G_1^{\mathfrak{M}}$ не имеет фраттиниевых G_1-главных факторов, то по лемме 1.16 G является гомоморфным образом группы G_1. Но $G_1/P\in\mathfrak{M}$ и P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G_1. Следовательно, $G\simeq G_1$, что невозможно. Вновь полученное противоречие показывает, что данный случай невозможен.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию 1) теоремы. Рассмотрим подформации $\mathfrak{F}_1=c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A_1$ и $\mathfrak{F}_2=c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A_2$. Если $A_1=Z_p$ и $A_2=Z_q$, где $p,q\in\omega$, то $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{N}_q$. Значит, $\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2=(1)$. Если $p\in\omega$, $q\notin\omega$, то $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}_2=c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}A_2$. По лемме 1.13 любая группа из $\mathfrak{F}_2$ имеет вид $H_1\times\ldots\times H_t$, где $t\geq 1$ и $H_1\simeq\ldots\simeq H_t\simeq A_2$. Так как $p\neq q$, то $\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2=(1)$. Аналогично доказывается случай, когда $p \notin \omega$, $q \in \omega$. Если $p \notin \omega$, $q \notin \omega$, то обе формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ состоят из прямых произведений групп, изоморфных A_1 и A_2 соответственно. Так как A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы, то $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. Последнее выполняется и в случае, когда хотя бы одна из групп A_i является простой неабелевой группой, $i = 1, 2$.

Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$. По лемме 1.2, $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1) = h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_2) = 2$. Согласно лемме 1.1, имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_2/^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{F}_1 \simeq \mathfrak{F}_2/^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_2/^{\tau}_{\omega_n}(1).$$

Значит, $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1) + h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_2) - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$.

Если для группы G выполняется условие 2) теоремы, то, по лемме 1.4, $\mathfrak{F}$ – $(\mathfrak{N}_p)^{\tau}_{\omega_n}$-критическая формация и, значит, $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть для группы G выполняется условие 3) теоремы. Тогда ввиду леммы 1.7 формация $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G = \mathrm{form}G$ и всякая подформация из $\mathfrak{F}$ τ-замкнута и n-кратно ω-композиционна. Значит, $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = h(\mathfrak{F})$. Если M – максимальная подгруппа в G и $\mathfrak{M} = \mathrm{form}M$, то $|M| = p$ и по лемме 1.2, $h(\mathfrak{M}) = 2$. Но ввиду леммы 1.11, $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация в $\mathfrak{F}$. Следовательно, $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = h(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть группа G удовлетворяет условию 4) теоремы. Так как $\mathfrak{F}$ – неприводимая формация, то по лемме 1.3 в $\mathfrak{F}$ имеется единственная максимальная подформация $\mathfrak{M} = \mathrm{form}H$. Согласно лемме 1.12, $\mathfrak{F}$ – минимальная неабелева формация. Тогда формация $\mathfrak{M}$ – абелева. Если H – абелева группа экспоненты p^2 ($p \notin \omega$), то ввиду леммы 1.2, $h(\mathfrak{M}) > 2$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$, что невозможно, так как $\mathfrak{F}$ неабелева. Значит, $H = Z_p$ группа простого порядка $p \notin \omega$. Согласно лемме 1.2, $h(\mathfrak{M}) = h(\mathrm{form}Z_p) = 2$. Поэтому $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = h(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию 5) теоремы и пусть $\mathfrak{M}$ – формация всех таких групп, у которых порядки композиционных факторов не принадлежит ω. Формация $\mathfrak{M}$ является s_n-замкнутой. Следовательно, она s_{sn}-замкнута. Поскольку мы рассматриваем только такие подгрупповые функторы τ, что $\tau \le s_{sn}$, то получаем, что формация $\mathfrak{M}$ τ-замкнута. Очевидно, что $G \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\tau\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1.8, формация $\tau\mathrm{form}G$, а также все ее подформации ω-композиционны. Ввиду примера 1 из [1] формация $c^{\tau}_{\omega}\mathrm{form}G$ имеет ω-композиционный спутник f такой, что $f(a) = \varnothing$ для всех $a \in \omega$ и $f(\omega') = c^{\tau}_{\omega}\mathrm{form}G$. Тогда формация $c^{\tau}_{\omega}\mathrm{form}G$ – n-кратно ω-композиционна. Поэтому $\tau\mathrm{form}G = c^{\tau}_{\omega}\mathrm{form}G = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G = \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 1.17 формация $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}G$ является τ-неприводимой и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация $\tau\mathrm{form}(\{G/P\} \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Поскольку по условию G/P и произвольная неединичная группа из $\mathfrak{X}$ имеют вид $A_1 \times \ldots \times A_t$, где $t \ge 1$ и $A_1 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$ – простая группа, порядок которой не принадлежит ω, то $\tau\mathrm{form}(\{G/P\} \cup \mathfrak{X}) = \tau\mathrm{form}A = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$. Но так как по лемме 1.2 $h^{\tau}_{\omega_n}(c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A) = 2$, то $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}) = 3$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает ряд следствий при различных τ, n и ω. Приведем лишь некоторые из них. Так при $n = 1$ из теоремы 2.1 вытекает

***Следствие* 2.1** (М.В. Задорожнюк [6]). *Тогда и только тогда τ-замкнутая ω-композиционная формация* $\mathfrak{F}$ *является элементом высоты* 3 *решетки* c^{τ}_{ω}, *когда* $\mathfrak{F} = c^{\tau}_{\omega}\mathrm{form}G$, *где либо* $G = A_1 \times A_2$, A_1 *и* A_2 *– простые неизоморфные группы, либо G – такая монолитическая группа с цоколем* $P \ne G$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, $P = G^{\mathfrak{N}_p}$ *для некоторого простого числа* $p \in \omega$ *и все собственные τ-подгруппы группы G являются p-группами;*

2) *G – циклическая группа порядка* p^2, $p \notin \omega$;

3) *G – неабелева группа порядка* p^3 *простой нечетной экспоненты* $p \notin \omega$;

4) $\pi(Com(P)) \cap \omega = \varnothing$, $P \not\subseteq \Phi(G)$ *и найдется такая простая группа A, что* $|A| \notin \omega$ *и факторгруппа G/P, а также всякая неединичная группа из* $\tau(G) \setminus \{G\}$ *имеют вид* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, *где* $t \ge 1$, $A_1 \simeq A_2 \simeq \ldots \simeq A_t \simeq A$.

В случае, когда τ – тривиальный подгрупповой функтор и $n = 1$, из теоремы 2.1 получаем

***Следствие* 2.2** (М.В. Задорожнюк [12]). *Тогда и только тогда ω-композиционная формация* $\mathfrak{F}$ *является элементом высоты* 3 *решетки всех ω-композиционных формаций, когда* $\mathfrak{F} = c_{\omega}\mathrm{form}G$, *где либо* $G = A_1 \times A_2$, A_1 *и* A_2 *– простые неизоморфные группы, либо G – такая монолитическая группа с цоколем* $P \ne G$, *что выполняется одно из следующих условий:*

1) $\pi(Com(P))\cap\omega=\varnothing$, $P=G^{\mathfrak{N}_p}$ *для некоторого простого числа* $p\in\omega$;

2) G *– циклическая группа порядка* p^2, $p\notin\omega$;

3) G *– неабелева группа порядка* p^3, *простой нечетной экспоненты* $p\notin\omega$;

4) $\pi(Com(P))\cap\omega=\varnothing$, $P\not\subseteq\Phi(G)$ *и* G/P *есть прямое произведение простых изоморфных групп порядка, не принадлежащего* ω.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* $c^{\tau}_{\omega_n}$ *-формация высоты 3 в решетке* $c^{\tau}_{\omega_n}$ ($n\geq 1$). *Тогда решетка* $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ *ее* $c^{\tau}_{\omega_n}$ *-подформаций дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – $c^{\tau}_{\omega_n}$ -формация и $h^{\tau}_{\omega_n}=3$. Тогда по теореме 2.1, $\mathfrak{F}=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G$, где G – одна из следующих групп:

1) $G=A_1\times A_2$, где A_1 и A_2 – простые неизоморфные группы;

2) G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{N}_p$ -группа с нефраттиниевым цоколем $P=G^{\mathfrak{N}_p}\neq G$, что $\pi(Com(P))\cap\omega=\varnothing$ и $p\in\omega$;

3) G – циклическая группа порядка p^2, $p\notin\omega$;

4) G – неабелева группа порядка p^3 простой нечетной экспоненты $p\notin\omega$;

5) G – монолитическая группа с нефраттиниевым цоколем $P\neq G$ таким, что $\pi(Com(P))\cap\omega=\varnothing$, и найдется такая простая группа A, что $|A|\notin\omega$ и факторгруппа G/P, а также всякая неединичная группа из $\tau(G)\setminus\{G\}$ имеют вид $A_1\times A_2\times\ldots\times A_t$, где $t\geq 1$, $A_1\simeq A_2\simeq\ldots\simeq A_t\simeq A$.

Пусть для группы G выполняется условие 1) и $\mathfrak{M}_1=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_1$, $\mathfrak{M}_2=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_2$. Предположим, что $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$. Пусть $A_1=Z_p$ и $A_2=Z_q$, где $p,q\in\omega$, $q\neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_p=\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2=\mathfrak{N}_q$. Противоречие. Значит, такой случай невозможен. Пусть $A_1=Z_p$, $p\in\omega$ и $|A_2|\notin\omega$. Тогда по лемме 1.7, $\mathfrak{M}_2=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A_2=\mathrm{form}A_2$. Значит, $\mathfrak{N}_p=\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2=\mathrm{form}A_2$. Но тогда $A_2\in\mathfrak{N}_p$. Противоречие. Аналогично придем к противоречию в случае, когда $|A_1|\notin\omega$ и $A_2=Z_q$, $q\in\omega$. Пусть теперь $|A_1|\notin\omega$ и $|A_2|\notin\omega$. Тогда ввиду леммы 1.7 получаем $\mathrm{form}A_1=\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2=\mathrm{form}A_2$. По лемме 1.13, $A_1\simeq A_2$. Вновь полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1\neq\mathfrak{M}_2$. Таким образом, $\mathfrak{F}=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2)$ и $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2=(1)$. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ – произвольная максимальная $c^{\tau}_{\omega_n}$ -подформация из $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{M}\in\{\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2\}$. Так как $h^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M})=2$, то по лемме 1.2, $\mathfrak{M}=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$, где A – простая группа. Положим $\mathfrak{X}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$. Допустим, что $A\notin\mathfrak{X}$. Тогда $A\in\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{X}$. Из лемм 1.18, 1.19 и 1.20, имеем

$$\mathfrak{F}=c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{N}^n_{\omega}\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}=\mathfrak{N}^n_{\omega}\mathrm{form}\mathfrak{X}.$$

Если $|A|\notin\omega$, то $A\in\mathrm{form}\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}$ и по лемме 1.16 получаем, что $A\in\mathrm{H}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$. Противоречие. Значит, данный случай невозможен. Пусть теперь $A=Z_p$, $p\in\omega$. Тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_p$. Пусть f – минимальный ω -композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Если $p\notin\pi(Com(\mathfrak{X}))$, то ввиду леммы 1.6, $f(p)=\varnothing$. Но из $A\in\mathfrak{F}$ следует, что $1\cong A/C^p(A)\in f(p)=\varnothing$. Противоречие. Поэтому $p\in\pi(Com(\mathfrak{X}))$. Таким образом, $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{X}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $A\in\mathfrak{X}$. Значит, либо $A\simeq A_1$, либо $A\simeq A_2$. Поэтому либо $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1$, либо $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_2$. Очевидно, что в этом случае решетка $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является дистрибутивной.

Пусть группа G удовлетворяет условию 2). Тогда формация $\mathfrak{F}$ $c^{\tau}_{\omega_n}$ -неприводима в решетке $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ и ее единственной максимальной $c^{\tau}_{\omega_n}$ -подформацией является формация $\mathfrak{N}_p$. В этом случае решетка $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является цепью. Поэтому, по лемме 1.21 решетка $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Если группа G удовлетворяет условию 3), то, ввиду леммы 1.11, формация $\mathfrak{M}=\mathrm{form}M$, где $|M|=p\notin\omega$, является максимальной подформацией формации $\mathfrak{F}$. Но поскольку высота формации $\mathfrak{M}$ в решетке $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ равна 2, то решетка $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является цепью. Следовательно, по лемме 1.16 эта решетка дистрибутивна.

Пусть группа G удовлетворяет условию 4). Ввиду леммы 1.3, в $\mathfrak{F}$ имеется единственная максимальная подформация $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathrm{form}Z_p$ – формация всех абелевых групп экспоненты, делящей p. Покажем, что $\mathfrak{M}=\mathrm{form}Z_p$. Предположим, что $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathrm{form}Z_p$. Пусть K – группа минимального порядка из $\mathfrak{M}\setminus\mathrm{form}Z_p$. Тогда группа K монолитична. Следовательно, $K\in\mathrm{form}Z_p$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathrm{form}Z_p$.

Допустим, что $\mathrm{form}Z_p \not\subseteq \mathfrak{M}$. Пусть M – группа минимального порядка из $\mathrm{form}Z_p \backslash \mathfrak{M}$. Тогда группа M монолитична. Но так как группа M абелева, то она циклична. Таким образом, экспонента группы M равна p. Тогда, очевидно, $M \in \mathfrak{M}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{form}Z_p \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{M} = \mathrm{form}Z_p$. Таким образом, формация $\mathfrak{M}$ состоит из абелевых групп экспоненты, делящей p. Поскольку формация $\mathrm{form}Z_p$ имеет высоту 2 в решетке $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, то эта решетка является цепью. Согласно лемме 1.21 это означает, что решетка $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Пусть теперь G удовлетворяет условию 5). Тогда формация $\mathfrak{F}$ совпадает с формацией $\tau\mathrm{form}G$, и каждая подформация формации $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-композиционной. Но по лемме 1.17 у формации $\tau\mathrm{form}G$ имеется лишь единственная максимальная τ-замкнутая подформация $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Следовательно, ввиду условия теоремы, имеет место равенство

$$\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\}) = \tau\mathrm{form}A = c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A.$$

Но так как по лемме 1.2 высота формации $c^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$ в решетке $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ равна 2, то эта решетка является цепью. Снова по лемме 1.21 получаем, что решетка $C^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Теорема доказана.

***Следствие* 2.3** (М.В. Задорожнюк [13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-композиционная формация, являющаяся элементном высоты* 3 *решетки c^{τ}_{ω}. Тогда решетка $C^{\tau}_{\omega}(\mathfrak{F})$ ее τ-замкнутых ω-композиционных подформаций дистрибутивна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба, А.Н.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

2. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

3. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 253 с.

4. *Биркгоф, Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф. – М. : Наука, 1984. – 568 с.

5. *Жизневский, П.А.* О критических частично композиционных формациях / П.А. Жизневский, В.Г. Сафонов // Вес. Нац. акад. навук. Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 44–49.

6. *Задорожнюк, М.В.* Об элементах высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-композиционных формаций / М.В. Задорожнюк // Вестник Гродн. гос. ун-та. – 2008. – № 2. – С. 16–21.

7. *Жизневский, П.А.* О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2010. – № 1 (58). – С. 185–191.

8. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

9. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889с.

10. *Жизневский, П.А.* К теории кратно частично композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский. – Гомель, 2008. – 35 с. – (Препринт / ГГУ им. Ф. Скорины; № 30).

11. *Сафонов, В.Г.* Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Сибирский математических журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.

12. *Кенько* (*Задорожнюк*), *М.В.* О ω-композиционных формациях длины 3 / М.В. Кенько // Вес. Нац. акад. навук. Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. – 2001. – № 1. – С. 22–25.

13. *Задорожнюк, М.В.* Элементы высоты 3 решетки всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций / М.В. Задорожнюк. – Гомель, 2008. (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 8).

Поступила в редакцию 26.05.11.